УДК 5530.12+531.51

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ В УСКОРЕННОЙ ВСЕЛЕННОЙ

И.А. Кох[1]

1 *irina_kokh@rambler.ru*; Казанский федеральный университет; научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Игнатьев Ю.Г.

Проведено численное моделирование процесса космологической эволюции частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной на основе уравнения типа Фоккера - Планка, предложенного Ю.Г. Игнатьевым в более ранних работах [1].

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерное моделирование, диффузионное уравнение, космология, СКМ Maple. Рассматривается процесс космологической эволюции частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной с пространственно - плоской метрикой Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

на основе уравнения типа Фоккера - Планка, полученного в [1]:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot a}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p^2} \frac{\partial}{\partial p}\left[p^2 \int\limits_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right], \qquad (1)$$

где p, q — абсолютные величины импульса,

$$A = \frac{16\pi^2}{L(s)}, \quad L(s) = 1 + \ln^2\left(1 + \frac{s_0}{s}\right), \quad s_0 = 4.$$

В этих обозначениях плотность числа частиц и след тензора энергии-импульса частиц имеют вид:

$$n(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q^2 f(q)\, dq, \qquad (2)$$

$$T_s(t) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q f(q)\, dq, \qquad (3)$$

При переходе к величинам:

$$p = \frac{\tilde p}{a}, n = \frac{\tilde n}{a^3}, T_s = \frac{\tilde T_s}{a^2}, \qquad (4)$$

и к безразмерному (кинетическому) времени:

$$\tau = \frac{1}{16\pi} \int\limits_0^t \frac{A\, dt}{a}, \qquad (5)$$

уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{p}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\tilde{p}\left(\tilde{n}\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} + 2\tilde{T}_s f\right). \tag{6}$$

В точной модели ускоренной Вселенной при переходе от ультрарелятивистской стадии к инфляционной, когда материя состоит из ультрарелятивистской жидкости и жидкости с уравнением состояния $\varepsilon + p = 0$ (космологическая постоянная, точное решение уравнения Эйнштейна примет вид:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}}\sqrt{\mathrm{sh}(2\Lambda_0 t)}, \tag{7}$$

которое при $t \to 0$ переходит в ультрарелятивистское решение:

$$a(t) = \sqrt{t}, \tag{8}$$

а при $t \to \infty$ - в решение для инфляционной стадии:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda_0}}\mathrm{e}^{\Lambda_0 t}. \tag{9}$$

С введением конформной плотности числа частиц и плотности энергии [2]:

$$\tilde{n}(\tau) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty f(\tau,\tilde{p})\tilde{p}^2 d\tilde{p} = \mathrm{Const}(\equiv n_0),$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tau) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty f(\tau,\tilde{p})\tilde{p}^3 d\tilde{p},$$

с помощью которых можно ввести средний конформный импульс: $<\tilde{p}>= \tilde{\varepsilon}(t)/\tilde{n}(t)$, так что $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}/a^4$, где $<p>=<\tilde{p}>/a$, и, следовательно, имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{\varepsilon} =<\tilde{p}>\tilde{n} \to <\tilde{p}>= \mathrm{Const}(\equiv<\tilde{p}_0>).$$

Энергию импульса представим в виде:

$$\beta(\tau)\tilde{n} = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty f(\tau,\tilde{p})\tilde{p}d\tilde{p},$$

и запишем окончательный вид уравнения (1):

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = \frac{\tilde{n}}{\tilde{p}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\tilde{p}\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} + 2\beta(\tau)f\right). \tag{10}$$

Производим нормировку с помощью формул

$$x = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0}, \quad f(\tau,x) = \frac{3\pi}{4(2S+1)}\frac{G(x,\tau)}{\tilde{p}_0^4},$$

так что

$$\int_0^\infty G(x)x^2dx = 1,$$

и получим диффузионное уравнение относительно функции G в форме:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}x^2\left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G\right), \tag{11}$$

где

$$b(\tau) = \int_0^\infty G(x,\tau)xdx. \tag{12}$$

Функция $G(x,\tau)$ должна удовлетворять начальным и граничным условиям вида:

$$G(x,0) = G_0(x), \tag{13}$$
$$\lim_{x\to\infty} G(x,\tau)x^3 = 0,$$

где τ - безразмерная временная, а x - безразмерная импульсная переменные. Исходя из вышеперечисленных выражений, делаем вывод, что функция $G_0(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\int_0^\infty G_0(x)x^2 = 1, \tag{14}$$
$$\int_0^\infty G_0(x)x^3 = 1.$$

Решим задачу Коши (11) с начально-граничными условиями (13). Выполняя в (11) подстановку $G(x,\tau) = \frac{V(x,\tau)}{x}$, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,\tau), \tag{15}$$

где

$$F(x,\tau) = \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}xVb(\tau), \tag{16}$$
$$b(\tau) = \int_0^\infty V(x,\tau)dx. \tag{17}$$

Причем $V(x,0) = xG_0(x)$, $V(0,\tau) = G(0,\tau)\cdot 0 = 0$.
В [2, 3] были предложены методы решения подобной задачи разложением решений по малости временной функции $b(\tau) = 0$. Следуя этому методу, в нулевом приближении получим:

$$\frac{\partial V^0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}, \tag{18}$$

где V^0 должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$V^0(0,\tau) = 0; \tag{19}$$
$$V^0(x,0) = \varphi(x);$$
$$x,\tau \in \mathbb{R}^+.$$

В первом приближении получим:

$$\frac{\partial V^1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V^1}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x} x V^0 b^0(\tau), \tag{20}$$

где V^1 должно удовлетворять следующим начально-краевым условиям:

$$V^1(0,\tau) = 0; \tag{21}$$
$$V^1(x,0) = 0;$$
$$x,\tau \in \mathbb{R}^+.$$

Причем $b^0(\tau) = \int\limits_0^\infty V^0(x,\tau)\,dx$.

Второе условие в (21) следует из следующих рассуждений:

$$V(x,0) = V^0(x,0) + V^1(x,0) + \ldots \Rightarrow V^1(x,0) = 0.$$

В результате приходим к рассмотрению начально - краевых задач Коши для однородного и неоднородного уравнений теплопроводности на полубесконечной прямой. Метод решения таких задач описан в [4] и основан на известной лемме математической физики, с помощью которой рассматривается способ решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконеной прямой с заданными начальными и граничными условиями.

В качестве функции начального распределения выбираем функцию вида

$$G_0(x) = \frac{a\exp(-bx)}{x},$$

где переменные a и b находятся из условия (14). Таким образом, имеем:

$$G_0(x) = \frac{4\exp(-2x)}{x}. \tag{22}$$

Использование метода [4], описывается в [5], где было получено решение задач (18)-(19) и (20)-(21).

В нулевом приближении функция G будет иметь вид:

$$G^0(x,\tau) = \frac{2}{x\sqrt{\pi\tau}}\int\limits_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau}\right)\right) G_0(\xi)\xi\,d\xi \tag{23}$$

В первом приближении функция G будет иметь вид:

$$G^1(x,\tau) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau \frac{b^0(t)\,dt}{\sqrt{(\tau-t)}}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(\tau-t)}\right)\right\} \frac{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^2 G^0(\xi,t)\,d\xi, \tag{24}$$

где

$$b^0(\tau) = \int_0^\infty G^0(x,\tau)x dx. \tag{25}$$

Подставляя в (23) функцию первоначального приближения (22), получим:

$$G^0(x,\tau) = \frac{2}{x\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau} - 2\xi\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\tau} - 2\xi\right) \right) d\xi \tag{26}$$

Вычисляя (26), получаем

$$G^0(x,\tau) = \frac{2}{x}\left(\mathrm{e}^{4\tau-2x}\mathrm{erf}\left(\frac{4\tau-x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \mathrm{e}^{4\tau-2x} + \mathrm{e}^{4\tau+2x}\mathrm{erf}\left(\frac{4\tau+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \mathrm{e}^{4\tau+2x}\right). \tag{27}$$

Найдем $b^0(\tau)$. Из (25) и (27) имеем:

$$b^0(\tau) = 2\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{4\tau-2x}\mathrm{erf}\left(\frac{4\tau-x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \mathrm{e}^{4\tau-2x} + \mathrm{e}^{4\tau+2x}\mathrm{erf}\left(\frac{4\tau+x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \mathrm{e}^{4\tau+2x}\right) dx. \tag{28}$$

Вычисляя (28), получаем

$$b^0(\tau) = -2. \tag{29}$$

При численном моделировании функции $G^0(x,\tau)$ с помощью СКМ Maple выясняем, что она не удовлетворяет интегральным условиям (14) при малых значениях τ (Рис. 1, 2), а при $\tau \geq 10$ имеем $G^0(x,\tau) \approx 0$.

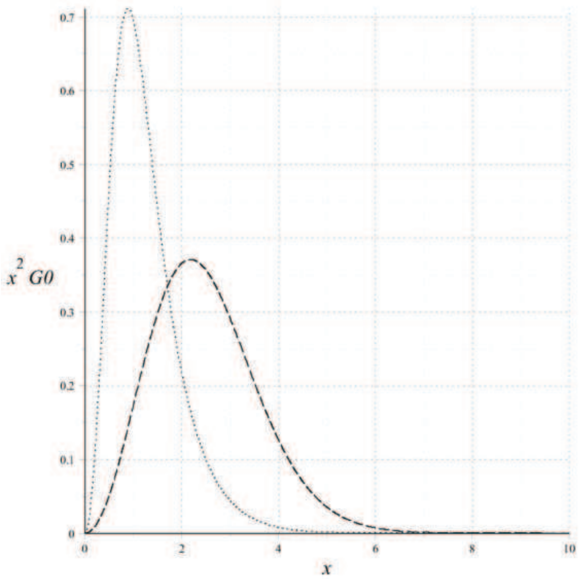

Рис. 1. Эволюция распределения плотности числа частиц в нулевом приближении при $\tau = 0.1; 1; 10$.

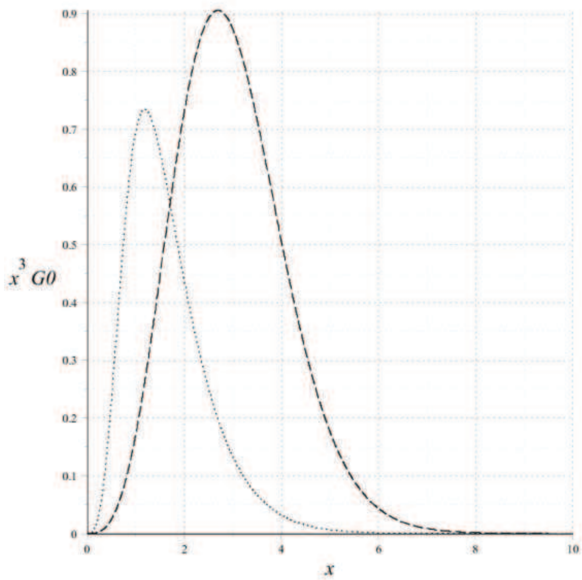

Рис. 2. Эволюция распределения плотности энергии частиц в нулевом приближении при $\tau = 0.1; 1; 10$.

Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамичексого равновесия в ранней Вселенной / Ю.Г. Игнатьев // Известия Вузов, Физика. - 1986. - Т. 29, № 2. - С. 19-24.

2. Ignatyev Yu.G. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early universe / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // Gravitation & Cosmology. - 2006. - Vol. 12, № 4 (48). - P. 1-12.

3. Ignatyev Yu.G. Diffusion Model of Evolution of Superthermal High-Energy Particles under Scaling in the Early Universe. II. Early Stages / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // Gravitation and Cosmology. - 2008. - Vol. 14, № 4. - P. 301--308.

4. Боголюбов А.Н. Задачи по математической физике: Учебн. пособие / А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. - М.:Изд-во МГУ, 1998. - 350 с.

5. Кох И.А. Компьютерное моделирование в СКМ Maple диффузии частиц сверхвысоких энергий в ускоренной Вселенной на основе асимптотических оценок / И.А. Кох // Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики: материалы конференции и труды семинара. - Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. - С. 224-227.

NUMERICAL MODELLING OF DIFFUSION OF THE SUPERHIGH ENERGIES PARTICLES IN ACCELERATED UNIVERSE

I.A. Kokh

The numerical modelling in CAS Maple of the superhigh energies particles cosmological evolution process in accelerated Universe on the basic of equation type Fökker - Planck, introduced by Yu.G. Ignat'ev in most early works [1], is carried.

Keywords: mathematical modelling, computer modelling, diffusion equation, cosmology, SCM Maple.

УДК 530.12+539.12

ТЕОРИЯ ВСЕГО КАК АЛГОРИТМ

А.Л. Круглый[1]

1 *akrugly@mail.ru*; ГУ ФНЦ Научно Исследовательский Институт Системных Исследований РАН

Излагается подход к построению теории всего в рамках модели последовательного роста ориентированного ациклического графа.

Ключевые слова: теория всего, причинностное множество, ориентированный ациклический граф.

В настоящем докладе излагается подход к построению “теории всего”, основанный на локальной причинности и конечной делимости [1].

Под локальной причинностью понимается, что события образуют частично упорядоченное множество, и отношение порядка интерпретируется как отношение причинности. Примером является пространство Минковского. В пространстве Минковского в фиксированный момент времени не могут существовать конечные объекты, обладающие внутренними свойствами. В фиксированный момент времени имеется только множество физически не связанных точек. Нет физической